

Quantifications équivariantes

Fabian Radoux

Nancy, 27 Janvier 2011

Introduction

- Observables classiques : fonctions sur une variété symplectique (\mathcal{M}, ω) .

Introduction

- Observables classiques : fonctions sur une variété symplectique (\mathcal{M}, ω) .
- Observables quantiques : opérateurs sur un espace de Hilbert \mathcal{H} .

Introduction

- Observables classiques : fonctions sur une variété symplectique (\mathcal{M}, ω) .
- Observables quantiques : opérateurs sur un espace de Hilbert \mathcal{H} .
- Problème de Dirac : trouver une bijection $Q : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ telle que

Introduction

- Observables classiques : fonctions sur une variété symplectique (\mathcal{M}, ω) .
- Observables quantiques : opérateurs sur un espace de Hilbert \mathcal{H} .
- Problème de Dirac : trouver une bijection $Q : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ telle que
 - $Q(\mathbf{1}_{\mathcal{M}}) = \text{Id}_{\mathcal{H}}$,

Introduction

- Observables classiques : fonctions sur une variété symplectique (\mathcal{M}, ω) .
- Observables quantiques : opérateurs sur un espace de Hilbert \mathcal{H} .
- Problème de Dirac : trouver une bijection $Q : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ telle que
 - $Q(\mathbf{1}_{\mathcal{M}}) = \text{Id}_{\mathcal{H}}$,
 - $Q(\bar{f}) = Q(f)^*$,

Introduction

- Observables classiques : fonctions sur une variété symplectique (\mathcal{M}, ω) .
- Observables quantiques : opérateurs sur un espace de Hilbert \mathcal{H} .
- Problème de Dirac : trouver une bijection $Q : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ telle que
 - $Q(\mathbf{1}_{\mathcal{M}}) = \text{Id}_{\mathcal{H}}$,
 - $Q(\bar{f}) = Q(f)^*$,
 - $Q(\{f, g\}) = \frac{i}{\hbar}[Q(f), Q(g)]$.

- Hamiltonien H , observable F ,

Mécanique classique Mécanique quantique

$$\frac{dF}{dt} = \{H, F\} \quad \longmapsto \quad \frac{dQ(F)}{dt} = \frac{i}{\hbar}[Q(H), Q(F)]$$

- Hamiltonien H , observable F ,

Mécanique classique Mécanique quantique

$$\frac{dF}{dt} = \{H, F\} \quad \longmapsto \quad \frac{dQ(F)}{dt} = \frac{i}{\hbar}[Q(H), Q(F)]$$

- **Préquantification** : si $\mathcal{H} = L^2(\mathcal{M})$, si $\omega = d\alpha$,

- Hamiltonien H , observable F ,

Mécanique classique Mécanique quantique

$$\frac{dF}{dt} = \{H, F\} \quad \longmapsto \quad \frac{dQ(F)}{dt} = \frac{i}{\hbar}[Q(H), Q(F)]$$

- **Préquantification** : si $\mathcal{H} = L^2(\mathcal{M})$, si $\omega = d\alpha$,

$$Q(f) = \frac{\hbar}{i}X_f + f - \langle X_f, \alpha \rangle.$$

- Problème de la préquantification : si $\mathcal{M} = T^*M$, $L^2(T^*M)$ est trop grand \longrightarrow réduction de \mathcal{H} .

- Problème de la préquantification : si $\mathcal{M} = T^*M$, $L^2(T^*M)$ est trop grand \longrightarrow réduction de \mathcal{H} .
- Polarisation de (\mathcal{M}, ω) : distribution $P \subset T\mathcal{M}$.

- Problème de la préquantification : si $\mathcal{M} = T^*M$, $L^2(T^*M)$ est trop grand \longrightarrow réduction de \mathcal{H} .
- Polarisation de (\mathcal{M}, ω) : distribution $P \subset T\mathcal{M}$.
- P permet de réduire \mathcal{H} , on passe de \mathcal{H} à \mathcal{H}^P .

- Problème de la préquantification : si $\mathcal{M} = T^*M$, $L^2(T^*M)$ est trop grand \longrightarrow réduction de \mathcal{H} .
- Polarisation de (\mathcal{M}, ω) : distribution $P \subset T\mathcal{M}$.
- P permet de réduire \mathcal{H} , on passe de \mathcal{H} à \mathcal{H}^P .
- L'observable f est quantifiable si $Q(f)$ préserve \mathcal{H}^P .

- Problème de la préquantification : si $\mathcal{M} = T^*M$, $L^2(T^*M)$ est trop grand \longrightarrow réduction de \mathcal{H} .
- Polarisation de (\mathcal{M}, ω) : distribution $P \subset T\mathcal{M}$.
- P permet de réduire \mathcal{H} , on passe de \mathcal{H} à \mathcal{H}^P .
- L'observable f est quantifiable si $Q(f)$ préserve \mathcal{H}^P .
- L'ensemble des observables quantifiables : \mathcal{A} .

- Problème de la préquantification : si $\mathcal{M} = T^*M$, $L^2(T^*M)$ est trop grand \longrightarrow réduction de \mathcal{H} .
- Polarisation de (\mathcal{M}, ω) : distribution $P \subset T\mathcal{M}$.
- P permet de réduire \mathcal{H} , on passe de \mathcal{H} à \mathcal{H}^P .
- L'observable f est quantifiable si $Q(f)$ préserve \mathcal{H}^P .
- L'ensemble des observables quantifiables : \mathcal{A} .
- Quantification géométrique Q_G : $Q_G = Q|_{\mathcal{A}}$.

- Si $\mathcal{M} = T^*M$, si P est la polarisation verticale, alors

$$\mathcal{H}^P \cong L^2(M), \mathcal{A} \cong \mathcal{S}_{\leq 1}(M),$$

- Si $\mathcal{M} = T^*M$, si P est la polarisation verticale, alors

$$\mathcal{H}^P \cong L^2(M), \quad \mathcal{A} \cong \mathcal{S}_{\leq 1}(M),$$

$$Q_G(X^i(x)p_i + A(x)) = \frac{\hbar}{i} X^i(x) \partial_i + A(x).$$

- Si $\mathcal{M} = T^*M$, si P est la polarisation verticale, alors

$$\mathcal{H}^P \cong L^2(M), \mathcal{A} \cong \mathcal{S}_{\leq 1}(M),$$

$$Q_G(X^i(x)p_i + A(x)) = \frac{\hbar}{i}X^i(x)\partial_i + A(x).$$

- Est-il possible d'étendre la quantification géométrique à $\mathcal{S}(M)$?

- Si $\mathcal{M} = T^*M$, si P est la polarisation verticale, alors

$$\mathcal{H}^P \cong L^2(M), \mathcal{A} \cong \mathcal{S}_{\leq 1}(M),$$

$$Q_G(X^i(x)p_i + A(x)) = \frac{\hbar}{i}X^i(x)\partial_i + A(x).$$

- Est-il possible d'étendre la quantification géométrique à $\mathcal{S}(M)$?
- Cette prolongation est-elle unique ?

- Si $\mathcal{M} = T^*M$, si P est la polarisation verticale, alors

$$\mathcal{H}^P \cong L^2(M), \quad \mathcal{A} \cong \mathcal{S}_{\leq 1}(M),$$

$$Q_G(X^i(x)p_i + A(x)) = \frac{\hbar}{i}X^i(x)\partial_i + A(x).$$

- Est-il possible d'étendre la quantification géométrique à $\mathcal{S}(M)$?
- Cette prolongation est-elle unique ?
- Est-il possible de rétablir l'unicité ?

Quantification équivariante

- Il y a beaucoup d'extensions de la quantification géométrique à $\mathcal{S}(M)$.

Quantification équivariante

- Il y a beaucoup d'extensions de la quantification géométrique à $\mathcal{S}(M)$.
- Idée pour rétablir l'unicité : ajouter une condition de symétrie.

Quantification équivariante

- Il y a beaucoup d'extensions de la quantification géométrique à $\mathcal{S}(M)$.
- Idée pour rétablir l'unicité : ajouter une condition de symétrie.
- La quantification géométrique est l'unique application $Q : \mathcal{S}_{\leq 1}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$ telle que $L_X Q = 0$ pour tout $X \in \text{Vect}(M)$.

Quantification équivariante

- Il y a beaucoup d'extensions de la quantification géométrique à $\mathcal{S}(M)$.
- Idée pour rétablir l'unicité : ajouter une condition de symétrie.
- La quantification géométrique est l'unique application $Q : \mathcal{S}_{\leq 1}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$ telle que $L_X Q = 0$ pour tout $X \in \text{Vect}(M)$.
- Il n'y a pas de prolongation Q de la quantification géométrique telle que $L_X Q = 0$ pour tout $X \in \text{Vect}(M)$.

- Quantification équivariante : action d'un groupe de Lie G sur M : $\Phi : G \times M \rightarrow M$.

- **Quantification équivariante** : action d'un groupe de Lie G sur M : $\Phi : G \times M \rightarrow M$.

- Quantification équivariante Q : bijection linéaire $Q : \mathcal{S}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$ t.q. $\sigma(Q(S)) = S$ et t.q.
 $Q(\Phi_g^* S) = \Phi_g^* Q(S) \forall g \in G$.

- **Quantification équivariante** : action d'un groupe de Lie G sur M : $\Phi : G \times M \rightarrow M$.
- Quantification équivariante Q : bijection linéaire $Q : \mathcal{S}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$ t.q. $\sigma(Q(S)) = S$ et t.q.
 $Q(\Phi_g^* S) = \Phi_g^* Q(S) \forall g \in G$.
- $Q(L_{h^*} S) = L_{h^*} Q(S) \forall h \in \mathfrak{g}$.

- **Quantification équivariante** : action d'un groupe de Lie G sur M : $\Phi : G \times M \rightarrow M$.
- Quantification équivariante Q : bijection linéaire $Q : \mathcal{S}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$ t.q. $\sigma(Q(S)) = S$ et t.q. $Q(\Phi_g^* S) = \Phi_g^* Q(S) \forall g \in G$.
- $Q(L_{h^*} S) = L_{h^*} Q(S) \forall h \in \mathfrak{g}$.
- Idée : prendre G assez petit pour avoir une quantification et assez grand pour avoir l'unicité.

- **Quantification équivariante** : action d'un groupe de Lie G sur M : $\Phi : G \times M \rightarrow M$.
- Quantification équivariante Q : bijection linéaire $Q : \mathcal{S}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$ t.q. $\sigma(Q(S)) = S$ et t.q. $Q(\Phi_g^* S) = \Phi_g^* Q(S) \forall g \in G$.
- $Q(L_{h^*} S) = L_{h^*} Q(S) \forall h \in \mathfrak{g}$.
- Idée : prendre G assez petit pour avoir une quantification et assez grand pour avoir l'unicité.
- **Cas projectif (P. Lecomte, V. Ovsienko)** :
 - $PGL(m+1, \mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{R}P^m$.

- **Quantification équivariante** : action d'un groupe de Lie G sur M : $\Phi : G \times M \rightarrow M$.
- Quantification équivariante Q : bijection linéaire $Q : \mathcal{S}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$ t.q. $\sigma(Q(S)) = S$ et t.q.
 $Q(\Phi_g^* S) = \Phi_g^* Q(S) \forall g \in G$.
- $Q(L_{h^*} S) = L_{h^*} Q(S) \forall h \in \mathfrak{g}$.
- Idée : prendre G assez petit pour avoir une quantification et assez grand pour avoir l'unicité.
- **Cas projectif (P. Lecomte, V. Ovsienko)** :
 - $PGL(m+1, \mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{R}P^m$.
 - $X \in \mathfrak{sl}(m+1, \mathbb{R}) \mapsto X^*$ champ de vecteurs sur \mathbb{R}^m .

- **Quantification équivariante** : action d'un groupe de Lie G sur M : $\Phi : G \times M \rightarrow M$.
- Quantification équivariante Q : bijection linéaire $Q : \mathcal{S}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$ t.q. $\sigma(Q(S)) = S$ et t.q.
 $Q(\Phi_g^* S) = \Phi_g^* Q(S) \forall g \in G$.
- $Q(L_{h^*} S) = L_{h^*} Q(S) \forall h \in \mathfrak{g}$.
- Idée : prendre G assez petit pour avoir une quantification et assez grand pour avoir l'unicité.
- **Cas projectif (P. Lecomte, V. Ovsienko)** :
 - $PGL(m+1, \mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{R}P^m$.
 - $X \in \mathfrak{sl}(m+1, \mathbb{R}) \mapsto X^*$ champ de vecteurs sur \mathbb{R}^m .
 - $\exists Q : L_X Q(S) = Q(L_X S) \forall X \in \mathfrak{sl}(m+1, \mathbb{R})$.

- Cas conforme (C. Duval, P. Lecomte, V. Ovsienko) :
- $SO(p+1, q+1)$ agit sur $S^p \times S^q$.

- Cas conforme (C. Duval, P. Lecomte, V. Ovsienko) :
- $SO(p+1, q+1)$ agit sur $S^p \times S^q$.
- $X \in \mathfrak{so}(p+1, q+1) \mapsto X^*$ champ de vecteurs sur \mathbb{R}^m .

- Cas conforme (C. Duval, P. Lecomte, V. Ovsienko) :
- $SO(p+1, q+1)$ agit sur $S^p \times S^q$.
- $X \in \mathfrak{so}(p+1, q+1) \mapsto X^*$ champ de vecteurs sur \mathbb{R}^m .
- $\exists Q : L_X Q(S) = Q(L_X S) \forall X \in \mathfrak{so}(p+1, q+1)$.

- Cas conforme (C. Duval, P. Lecomte, V. Ovsienko) :
- $SO(p+1, q+1)$ agit sur $S^p \times S^q$.
- $X \in \mathfrak{so}(p+1, q+1) \mapsto X^*$ champ de vecteurs sur \mathbb{R}^m .
- $\exists Q : L_X Q(S) = Q(L_X S) \forall X \in \mathfrak{so}(p+1, q+1)$.
- Méthode de l'opérateur de Casimir : \mathfrak{l} : Algèbre de Lie semi-simple pourvue d'une forme de Killing non dégénérée K .

- Cas conforme (C. Duval, P. Lecomte, V. Ovsienko) :
- $SO(p+1, q+1)$ agit sur $S^p \times S^q$.
- $X \in \mathfrak{so}(p+1, q+1) \mapsto X^*$ champ de vecteurs sur \mathbb{R}^m .
- $\exists Q : L_X Q(S) = Q(L_X S) \forall X \in \mathfrak{so}(p+1, q+1)$.
- Méthode de l'opérateur de Casimir : \mathfrak{l} : Algèbre de Lie semi-simple pourvue d'une forme de Killing non dégénérée K .
- (V, β) : représentation de \mathfrak{l} .

- Cas conforme (C. Duval, P. Lecomte, V. Ovsienko) :
- $SO(p+1, q+1)$ agit sur $S^p \times S^q$.
- $X \in \mathfrak{so}(p+1, q+1) \mapsto X^*$ champ de vecteurs sur \mathbb{R}^m .
- $\exists Q : L_X Q(S) = Q(L_X S) \forall X \in \mathfrak{so}(p+1, q+1)$.
- Méthode de l'opérateur de Casimir : \mathfrak{l} : Algèbre de Lie semi-simple pourvue d'une forme de Killing non dégénérée K .
- (V, β) : représentation de \mathfrak{l} .
- $(u_i : i \leq n)$: base de \mathfrak{l} ; $(u'_i : i \leq n)$: base Killing-duale $(K(u_i, u'_j) = \delta_{i,j})$.

- Cas conforme (C. Duval, P. Lecomte, V. Ovsienko) :
- $SO(p+1, q+1)$ agit sur $S^p \times S^q$.
- $X \in \mathfrak{so}(p+1, q+1) \mapsto X^*$ champ de vecteurs sur \mathbb{R}^m .
- $\exists Q : L_X Q(S) = Q(L_X S) \forall X \in \mathfrak{so}(p+1, q+1)$.
- Méthode de l'opérateur de Casimir : \mathfrak{l} : Algèbre de Lie semi-simple pourvue d'une forme de Killing non dégénérée K .
- (V, β) : représentation de \mathfrak{l} .
- $(u_i : i \leq n)$: base de \mathfrak{l} ; $(u'_i : i \leq n)$: base Killing-duale ($K(u_i, u'_j) = \delta_{i,j}$).
- Opérateur de Casimir (V, β) :

$$\sum_{i=1}^n \beta(u'_i) \beta(u_i).$$

- $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m), L)$ et $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^m), \mathcal{L})$ sont des représentations de \mathfrak{g} .

- $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m), L)$ et $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^m), \mathcal{L})$ sont des représentations de \mathfrak{g} .
- C et \mathcal{C} : opérateurs de Casimir de \mathfrak{g} sur $\mathcal{S}(M)$ et $\mathcal{D}(M)$.

- $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m), L)$ et $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^m), \mathcal{L})$ sont des représentations de \mathfrak{g} .
- C et \mathcal{C} : opérateurs de Casimir de \mathfrak{g} sur $\mathcal{S}(M)$ et $\mathcal{D}(M)$.
- Si $C(S) = \alpha S$ et $\mathcal{L} \circ Q = Q \circ L$, alors $\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$.

- $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m), L)$ et $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^m), \mathcal{L})$ sont des représentations de \mathfrak{g} .
- C et \mathcal{C} : opérateurs de Casimir de \mathfrak{g} sur $\mathcal{S}(M)$ et $\mathcal{D}(M)$.
- Si $C(S) = \alpha S$ et $\mathcal{L} \circ Q = Q \circ L$, alors $\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$.
- Dans les situations non-critiques : si $C(S) = \alpha S$, alors $\exists!$ $Q(S)$ t.q. $\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$, $\sigma(Q(S)) = S$.

- $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m), L)$ et $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^m), \mathcal{L})$ sont des représentations de \mathfrak{g} .
- C et \mathcal{C} : opérateurs de Casimir de \mathfrak{g} sur $\mathcal{S}(M)$ et $\mathcal{D}(M)$.
- Si $C(S) = \alpha S$ et $\mathcal{L} \circ Q = Q \circ L$, alors $\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$.
- Dans les situations non-critiques : si $C(S) = \alpha S$, alors $\exists!$ $Q(S)$ t.q. $\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$, $\sigma(Q(S)) = S$.
- Dans ces conditions : $\mathcal{L}(Q(S)) = Q(L(S))$ car :

- $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m), L)$ et $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^m), \mathcal{L})$ sont des représentations de \mathfrak{g} .
- C et \mathcal{C} : opérateurs de Casimir de \mathfrak{g} sur $\mathcal{S}(M)$ et $\mathcal{D}(M)$.
- Si $C(S) = \alpha S$ et $\mathcal{L} \circ Q = Q \circ L$, alors $\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$.
- Dans les situations non-critiques : si $C(S) = \alpha S$, alors $\exists!$ $Q(S)$ t.q. $\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$, $\sigma(Q(S)) = S$.
- Dans ces conditions : $\mathcal{L}(Q(S)) = Q(L(S))$ car :
 - $\sigma(\mathcal{L}(Q(S))) = \sigma(Q(L(S))) = L(S)$;

- $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m), L)$ et $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^m), \mathcal{L})$ sont des représentations de \mathfrak{g} .
- C et \mathcal{C} : opérateurs de Casimir de \mathfrak{g} sur $\mathcal{S}(M)$ et $\mathcal{D}(M)$.
- Si $C(S) = \alpha S$ et $\mathcal{L} \circ Q = Q \circ L$, alors $\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$.
- Dans les situations non-critiques : si $C(S) = \alpha S$, alors $\exists!$ $Q(S)$ t.q. $\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$, $\sigma(Q(S)) = S$.
- Dans ces conditions : $\mathcal{L}(Q(S)) = Q(L(S))$ car :
 - $\sigma(\mathcal{L}(Q(S))) = \sigma(Q(L(S))) = L(S)$;
 - Comme $C(L(S)) = \alpha L(S)$, $\mathcal{C}(Q(L(S))) = \alpha Q(L(S))$;

- $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m), L)$ et $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^m), \mathcal{L})$ sont des représentations de \mathfrak{g} .
- C et \mathcal{C} : opérateurs de Casimir de \mathfrak{g} sur $\mathcal{S}(M)$ et $\mathcal{D}(M)$.
- Si $C(S) = \alpha S$ et $\mathcal{L} \circ Q = Q \circ L$, alors $\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$.
- Dans les situations non-critiques : si $C(S) = \alpha S$, alors $\exists!$ $Q(S)$ t.q. $\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$, $\sigma(Q(S)) = S$.
- Dans ces conditions : $\mathcal{L}(Q(S)) = Q(L(S))$ car :
 - $\sigma(\mathcal{L}(Q(S))) = \sigma(Q(L(S))) = L(S)$;
 - Comme $C(L(S)) = \alpha L(S)$, $\mathcal{C}(Q(L(S))) = \alpha Q(L(S))$;
 - $\mathcal{C}(\mathcal{L}(Q(S))) = \mathcal{L}(\mathcal{C}(Q(S))) = \alpha \mathcal{L}(Q(S))$.

- $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m), L)$ et $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^m), \mathcal{L})$ sont des représentations de \mathfrak{g} .
- C et \mathcal{C} : opérateurs de Casimir de \mathfrak{g} sur $\mathcal{S}(M)$ et $\mathcal{D}(M)$.
- Si $C(S) = \alpha S$ et $\mathcal{L} \circ Q = Q \circ L$, alors $\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$.
- Dans les situations non-critiques : si $C(S) = \alpha S$, alors $\exists!$ $Q(S)$ t.q. $\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$, $\sigma(Q(S)) = S$.
- Dans ces conditions : $\mathcal{L}(Q(S)) = Q(L(S))$ car :
 - $\sigma(\mathcal{L}(Q(S))) = \sigma(Q(L(S))) = L(S)$;
 - Comme $C(L(S)) = \alpha L(S)$, $\mathcal{C}(Q(L(S))) = \alpha Q(L(S))$;
 - $\mathcal{C}(\mathcal{L}(Q(S))) = \mathcal{L}(\mathcal{C}(Q(S))) = \alpha \mathcal{L}(Q(S))$.
- **Généralisation (F. Boniver, P. Mathonet) :** algèbres IFFT
 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$

- Conjecture (P. Lecomte) : $Q(g) : \mathcal{S}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$

- Conjecture (P. Lecomte) : $Q(g) : \mathcal{S}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$ naturel

- Conjecture (P. Lecomte) : $Q(g) : \mathcal{S}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$ naturel
et $Q(g) = Q(g')$ si $g = fg'$ avec $f > 0$

- Conjecture (P. Lecomte) : $Q(g) : \mathcal{S}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$ naturel
et $Q(g) = Q(g')$ si $g = fg'$ avec $f > 0$

$$\varphi_t^* Q(g_0)(S) = Q(\varphi_t^* g_0)(\varphi_t^* S), \quad g_0 \text{ métrique canonique de } \mathbb{R}^m$$

$$\varphi_t^* Q(g_0)(S) = Q(g_0)(\varphi_t^* S), \quad \varphi_t \text{ flot de } X \in so(p+1, q+1)$$

- Conjecture (P. Lecomte) : $Q(g) : \mathcal{S}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$ naturel
et $Q(g) = Q(g')$ si $g = fg'$ avec $f > 0$

$$\varphi_t^* Q(g_0)(S) = Q(\varphi_t^* g_0)(\varphi_t^* S), \quad g_0 \text{ métrique canonique de } \mathbb{R}^m$$

$$\varphi_t^* Q(g_0)(S) = Q(g_0)(\varphi_t^* S), \quad \varphi_t \text{ flot de } X \in \mathfrak{so}(p+1, q+1)$$

$$L_X Q(g_0)(S) = Q(g_0)(L_X S)$$

- Conjecture (P. Lecomte) : $Q(g) : \mathcal{S}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$ naturel
et $Q(g) = Q(g')$ si $g = fg'$ avec $f > 0$

$$\varphi_t^* Q(g_0)(S) = Q(\varphi_t^* g_0)(\varphi_t^* S), \quad g_0 \text{ métrique canonique de } \mathbb{R}^m$$

$$\varphi_t^* Q(g_0)(S) = Q(g_0)(\varphi_t^* S), \quad \varphi_t \text{ flot de } X \in \mathfrak{so}(p+1, q+1)$$

$$L_X Q(g_0)(S) = Q(g_0)(L_X S)$$

- Conjecture (P. Lecomte) : $Q(\nabla) : \mathcal{S}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$

- Conjecture (P. Lecomte) : $Q(g) : \mathcal{S}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$ naturel
et $Q(g) = Q(g')$ si $g = fg'$ avec $f > 0$

$$\varphi_t^* Q(g_0)(S) = Q(\varphi_t^* g_0)(\varphi_t^* S), \quad g_0 \text{ métrique canonique de } \mathbb{R}^m$$

$$\varphi_t^* Q(g_0)(S) = Q(g_0)(\varphi_t^* S), \quad \varphi_t \text{ flot de } X \in \mathfrak{so}(p+1, q+1)$$

$$L_X Q(g_0)(S) = Q(g_0)(L_X S)$$

- Conjecture (P. Lecomte) : $Q(\nabla) : \mathcal{S}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$ naturel

- Conjecture (P. Lecomte) : $Q(g) : \mathcal{S}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$ naturel
et $Q(g) = Q(g')$ si $g = fg'$ avec $f > 0$

$$\varphi_t^* Q(g_0)(S) = Q(\varphi_t^* g_0)(\varphi_t^* S), \quad g_0 \text{ métrique canonique de } \mathbb{R}^m$$

$$\varphi_t^* Q(g_0)(S) = Q(g_0)(\varphi_t^* S), \quad \varphi_t \text{ flot de } X \in \mathfrak{so}(p+1, q+1)$$

$$L_X Q(g_0)(S) = Q(g_0)(L_X S)$$

- Conjecture (P. Lecomte) : $Q(\nabla) : \mathcal{S}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$ naturel
et $Q(\nabla) = Q(\nabla')$ si $\nabla' = \nabla + \alpha \vee id$

- **Conjecture (P. Lecomte)** : $Q(g) : \mathcal{S}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$ naturel et $Q(g) = Q(g')$ si $g = fg'$ avec $f > 0$

$$\varphi_t^* Q(g_0)(S) = Q(\varphi_t^* g_0)(\varphi_t^* S), \quad g_0 \text{ métrique canonique de } \mathbb{R}^m$$

$$\varphi_t^* Q(g_0)(S) = Q(g_0)(\varphi_t^* S), \quad \varphi_t \text{ flot de } X \in \mathfrak{so}(p+1, q+1)$$

$$L_X Q(g_0)(S) = Q(g_0)(L_X S)$$

- **Conjecture (P. Lecomte)** : $Q(\nabla) : \mathcal{S}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$ naturel et $Q(\nabla) = Q(\nabla')$ si $\nabla' = \nabla + \alpha \vee id$

$$\varphi_t^* Q(\nabla_0)(S) = Q(\varphi_t^* \nabla_0)(\varphi_t^* S), \quad \nabla_0 \text{ connexion plate de } \mathbb{R}^m$$

$$\varphi_t^* Q(\nabla_0)(S) = Q(\nabla_0)(\varphi_t^* S), \quad \varphi_t \text{ flot de } X \in \mathfrak{sl}(m+1, \mathbb{R})$$

- **Conjecture (P. Lecomte)** : $Q(g) : \mathcal{S}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$ naturel et $Q(g) = Q(g')$ si $g = fg'$ avec $f > 0$

$$\varphi_t^* Q(g_0)(S) = Q(\varphi_t^* g_0)(\varphi_t^* S), \quad g_0 \text{ métrique canonique de } \mathbb{R}^m$$

$$\varphi_t^* Q(g_0)(S) = Q(g_0)(\varphi_t^* S), \quad \varphi_t \text{ flot de } X \in \mathfrak{so}(p+1, q+1)$$

$$L_X Q(g_0)(S) = Q(g_0)(L_X S)$$

- **Conjecture (P. Lecomte)** : $Q(\nabla) : \mathcal{S}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$ naturel et $Q(\nabla) = Q(\nabla')$ si $\nabla' = \nabla + \alpha \vee id$

$$\varphi_t^* Q(\nabla_0)(S) = Q(\varphi_t^* \nabla_0)(\varphi_t^* S), \quad \nabla_0 \text{ connexion plate de } \mathbb{R}^m$$

$$\varphi_t^* Q(\nabla_0)(S) = Q(\nabla_0)(\varphi_t^* S), \quad \varphi_t \text{ flot de } X \in \mathfrak{sl}(m+1, \mathbb{R})$$

$$L_X Q(\nabla_0)(S) = Q(\nabla_0)(L_X S)$$

- Méthode de M. Bordemann :

- Méthode de M. Bordemann : $M \mapsto \tilde{M}$;

- Méthode de M. Bordemann : $M \mapsto \tilde{M}$;
 $\nabla \mapsto \tilde{\nabla}$;

- Méthode de M. Bordemann : $M \mapsto \tilde{M}$;
 $\nabla \mapsto \tilde{\nabla}$;
 $S \mapsto \tilde{S}$;

• Méthode de M. Bordemann : $M \mapsto \tilde{M}$;

$$\nabla \mapsto \tilde{\nabla};$$

$$S \mapsto \tilde{S};$$

$$Q(\widetilde{\nabla})(\tilde{S})(f) = \tau(\tilde{\nabla})(\tilde{S})(\tilde{f})$$

- Questions :

- Questions : Valeurs critiques de δ

- Questions : Valeurs critiques de δ
Formule explicite

- Questions : Valeurs critiques de δ

Formule explicite

Unicité

- Questions : Valeurs critiques de δ

Formule explicite

Unicité

Autres opérateurs différentiels

- Questions : Valeurs critiques de δ

Formule explicite

Unicité

Autres opérateurs différentiels

Cas conforme

- Fibrés et connexions de Cartan

- Fibrés et connexions de Cartan

$$[\nabla] \text{ (ou } [g]) \mapsto (P \rightarrow M)$$

- Fibrés et connexions de Cartan

$$[\nabla] \text{ (ou } [g]) \mapsto (P \rightarrow M)$$

$$[\nabla] \text{ (ou } [g]) \mapsto (\omega : TP \rightarrow \mathfrak{g})$$

- Fibrés et connexions de Cartan

$$[\nabla] \text{ (ou } [g]) \mapsto (P \rightarrow M)$$

$$[\nabla] \text{ (ou } [g]) \mapsto (\omega : TP \rightarrow \mathfrak{g})$$

$$\omega_u : T_u P \rightarrow \mathfrak{g} \text{ bijection } \forall u \in P$$

- Fibrés et connexions de Cartan

$$[\nabla] \text{ (ou } [g]) \mapsto (P \rightarrow M)$$

$$[\nabla] \text{ (ou } [g]) \mapsto (\omega : TP \rightarrow \mathfrak{g})$$

$$\omega_u : T_u P \rightarrow \mathfrak{g} \text{ bijection } \forall u \in P$$

$$P \subset P^2 M, \quad p : P \rightarrow P_0 \subset P^1 M$$

- Fibrés et connexions de Cartan

$$[\nabla] \text{ (ou } [g]) \mapsto (P \rightarrow M)$$

$$[\nabla] \text{ (ou } [g]) \mapsto (\omega : TP \rightarrow \mathfrak{g})$$

$$\omega_u : T_u P \rightarrow \mathfrak{g} \text{ bijection } \forall u \in P$$

$$P \subset P^2 M, p : P \rightarrow P_0 \subset P^1 M$$

$$\mathcal{C}^\infty(P_0, V)_{G_0} \ni T \mapsto p^* T \in \mathcal{C}^\infty(P, V)_H$$

• Fibrés et connexions de Cartan

$$[\nabla] \text{ (ou } [g]) \mapsto (P \rightarrow M)$$

$$[\nabla] \text{ (ou } [g]) \mapsto (\omega : TP \rightarrow \mathfrak{g})$$

$$\omega_u : T_u P \rightarrow \mathfrak{g} \text{ bijection } \forall u \in P$$

$$P \subset P^2 M, p : P \rightarrow P_0 \subset P^1 M$$

$$\mathcal{C}^\infty(P_0, V)_{G_0} \ni T \mapsto p^* T \in \mathcal{C}^\infty(P, V)_H$$

$$\text{avec } H = G_0 \rtimes G_1, \mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$

• Fibrés et connexions de Cartan

$$[\nabla] \text{ (ou } [g]) \mapsto (P \rightarrow M)$$

$$[\nabla] \text{ (ou } [g]) \mapsto (\omega : TP \rightarrow \mathfrak{g})$$

$$\omega_u : T_u P \rightarrow \mathfrak{g} \text{ bijection } \forall u \in P$$

$$P \subset P^2 M, p : P \rightarrow P_0 \subset P^1 M$$

$$\mathcal{C}^\infty(P_0, V)_{G_0} \ni T \mapsto p^* T \in \mathcal{C}^\infty(P, V)_H$$

$$\text{avec } H = G_0 \rtimes G_1, \mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{h}, \mathfrak{g}_{-1} \cong \mathbb{R}^m$$

• Fibrés et connexions de Cartan

$$[\nabla] \text{ (ou } [g]) \mapsto (P \rightarrow M)$$

$$[\nabla] \text{ (ou } [g]) \mapsto (\omega : TP \rightarrow \mathfrak{g})$$

$$\omega_u : T_u P \rightarrow \mathfrak{g} \text{ bijection } \forall u \in P$$

$$P \subset P^2 M, p : P \rightarrow P_0 \subset P^1 M$$

$$\mathcal{C}^\infty(P_0, V)_{G_0} \ni T \mapsto p^* T \in \mathcal{C}^\infty(P, V)_H$$

$$\text{avec } H = G_0 \rtimes G_1, \mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{h}, \mathfrak{g}_{-1} \cong \mathbb{R}^m$$

$$\omega \mapsto \nabla^\omega(e_i) = L_{\omega^{-1}(e_i)}, e_i \in \mathfrak{g}_{-1}$$

• Fibrés et connexions de Cartan

$$[\nabla] \text{ (ou } [g]) \mapsto (P \rightarrow M)$$

$$[\nabla] \text{ (ou } [g]) \mapsto (\omega : TP \rightarrow \mathfrak{g})$$

$$\omega_u : T_u P \rightarrow \mathfrak{g} \text{ bijection } \forall u \in P$$

$$P \subset P^2 M, p : P \rightarrow P_0 \subset P^1 M$$

$$\mathcal{C}^\infty(P_0, V)_{G_0} \ni T \mapsto p^* T \in \mathcal{C}^\infty(P, V)_H$$

$$\text{avec } H = G_0 \rtimes G_1, \mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{h}, \mathfrak{g}_{-1} \cong \mathbb{R}^m$$

$$\omega \mapsto \nabla^\omega(e_i) = L_{\omega^{-1}(e_i)}, e_i \in \mathfrak{g}_{-1}$$

$$f \text{ } G_0\text{-équivariant} \Rightarrow \nabla^\omega f \text{ } G_0\text{-équivariant}$$

• Fibrés et connexions de Cartan

$$[\nabla] \text{ (ou } [g]) \mapsto (P \rightarrow M)$$

$$[\nabla] \text{ (ou } [g]) \mapsto (\omega : TP \rightarrow \mathfrak{g})$$

$$\omega_u : T_u P \rightarrow \mathfrak{g} \text{ bijection } \forall u \in P$$

$$P \subset P^2 M, p : P \rightarrow P_0 \subset P^1 M$$

$$\mathcal{C}^\infty(P_0, V)_{G_0} \ni T \mapsto p^* T \in \mathcal{C}^\infty(P, V)_H$$

$$\text{avec } H = G_0 \rtimes G_1, \mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{h}, \mathfrak{g}_{-1} \cong \mathbb{R}^m$$

$$\omega \mapsto \nabla^\omega(e_i) = L_{\omega^{-1}(e_i)}, e_i \in \mathfrak{g}_{-1}$$

$$f \text{ } G_0\text{-équivariant} \Rightarrow \nabla^\omega f \text{ } G_0\text{-équivariant}$$

$$f \text{ } G_1\text{-équivariant} \not\Rightarrow \nabla^\omega f \text{ } G_1\text{-équivariant}$$

- Le cas des densités (P. Mathonet, R.) :

- Le cas des densités (P. Mathonet, R.) :

$$S \mapsto p^* S \in \mathcal{C}^\infty(P, S_\delta^k(\mathbb{R}^m))_H$$

- Le cas des densités (P. Mathonet, R.) :

$$S \mapsto p^* S \in \mathcal{C}^\infty(P, S_\delta^k(\mathbb{R}^m))_H$$

$$f \mapsto p^* f \in \mathcal{C}^\infty(P, \Delta^\lambda(\mathbb{R}^m))_H$$

- Le cas des densités (P. Mathonet, R.) :

$$S \mapsto p^* S \in \mathcal{C}^\infty(P, S_\delta^k(\mathbb{R}^m))_H$$

$$f \mapsto p^* f \in \mathcal{C}^\infty(P, \Delta^\lambda(\mathbb{R}^m))_H$$

$$\omega \mapsto \text{Div}^\omega = \sum_i i(\epsilon^i) L_{\omega^{-1}(e_i)}$$

- Le cas des densités (P. Mathonet, R.) :

$$S \mapsto p^* S \in \mathcal{C}^\infty(P, S_\delta^k(\mathbb{R}^m))_H$$

$$f \mapsto p^* f \in \mathcal{C}^\infty(P, \Delta^\lambda(\mathbb{R}^m))_H$$

$$\omega \rightarrow \text{Div}^\omega = \sum_i i(\epsilon^i) L_{\omega^{-1}(e_i)}$$

Condition : $L_{h^*} Q(p^* S)(p^* f) = 0 \ \forall h \in \mathfrak{g}_1$

- Le cas des densités (P. Mathonet, R.) :

$$S \mapsto p^* S \in \mathcal{C}^\infty(P, S_\delta^k(\mathbb{R}^m))_H$$

$$f \mapsto p^* f \in \mathcal{C}^\infty(P, \Delta^\lambda(\mathbb{R}^m))_H$$

$$\omega \rightarrow \text{Div}^\omega = \sum_i i(\epsilon^i) L_{\omega^{-1}(e_i)}$$

Condition : $L_{h^*} Q(p^* S)(p^* f) = 0 \ \forall h \in \mathfrak{g}_1$

$\langle p^* S, \nabla_s^{\omega^k} p^* f \rangle$ pas G_1 -équivariant !

• Le cas des densités (P. Mathonet, R.) :

$$S \mapsto p^* S \in \mathcal{C}^\infty(P, S_\delta^k(\mathbb{R}^m))_H$$

$$f \mapsto p^* f \in \mathcal{C}^\infty(P, \Delta^\lambda(\mathbb{R}^m))_H$$

$$\omega \rightarrow \text{Div}^\omega = \sum_i i(\epsilon^i) L_{\omega^{-1}(e_i)}$$

Condition : $L_{h^*} Q(p^* S)(p^* f) = 0 \ \forall h \in \mathfrak{g}_1$

$\langle p^* S, \nabla_s^{\omega^k} p^* f \rangle$ pas G_1 -équivariant !

On ajoute des termes d'ordre inférieur en $p^* f \dots$

• Le cas des densités (P. Mathonet, R.) :

$$S \mapsto p^* S \in \mathcal{C}^\infty(P, S_\delta^k(\mathbb{R}^m))_H$$

$$f \mapsto p^* f \in \mathcal{C}^\infty(P, \Delta^\lambda(\mathbb{R}^m))_H$$

$$\omega \rightarrow \text{Div}^\omega = \sum_i i(\epsilon^i) L_{\omega^{-1}(\epsilon_i)}$$

Condition : $L_{h^*} Q(p^* S)(p^* f) = 0 \ \forall h \in \mathfrak{g}_1$

$\langle p^* S, \nabla_s^{\omega^k} p^* f \rangle$ pas G_1 -équivariant !

On ajoute des termes d'ordre inférieur en $p^* f$...

On trouve alors :

$$Q_M(\nabla, S)(f) = p^{*-1}(\sum_{l=0}^k C_{k,l} \langle \text{Div}^{\omega^l} p^* S, \nabla_s^{\omega^{k-l}} p^* f \rangle),$$

$$\text{avec } C_{k,l} = \frac{(\lambda + \frac{k-1}{m+1}) \cdots (\lambda + \frac{k-l}{m+1})}{\gamma_{2k-1} \cdots \gamma_{2k-l}} \binom{k}{l}, \forall l \geq 1, \quad C_{k,0} = 1$$

- Formule explicite sur $M(\mathbb{R})$

- Formule explicite sur $M(R)$
- Non-unicité \leftrightarrow courbure de $\omega(R)$

- Autres opérateurs différentiels et cas conforme (P. Mathonet, R.) : méthode des opérateurs de Casimir :

- Autres opérateurs différentiels et cas conforme (P. Mathonet, R.) : méthode des opérateurs de Casimir :

- Cas "plat" : Quantification affine Q_{Aff} : si

$$S = \sum_{|\alpha|} f_{\alpha} \otimes e_1^{\alpha_1} \vee \dots \vee e_m^{\alpha_m},$$

$$Q_{Aff}(S) := \sum_{|\alpha|} f_{\alpha} \partial_{x^1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x^m}^{\alpha_m}.$$

•Autres opérateurs différentiels et cas conforme (P. Mathonet, R.) : méthode des opérateurs de Casimir :

•Cas "plat" : Quantification affine Q_{Aff} : si

$$S = \sum_{|\alpha|} f_{\alpha} \otimes e_1^{\alpha_1} \vee \dots \vee e_m^{\alpha_m},$$

$$Q_{Aff}(S) := \sum_{|\alpha|} f_{\alpha} \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_m}^{\alpha_m}.$$

•Cas "courbe" : "Quantification affine" Q_{ω} : si

$$S = f \otimes h_1 \otimes \dots \otimes h_k, \quad Q_{\omega}(S) := f \circ L_{\omega^{-1}}(h_1) \dots L_{\omega^{-1}}(h_k).$$

•Autres opérateurs différentiels et cas conforme (P. Mathonet, R.) : méthode des opérateurs de Casimir :

•Cas "plat" : Quantification affine Q_{Aff} : si

$$S = \sum_{|\alpha|} f_{\alpha} \otimes e_1^{\alpha_1} \vee \dots \vee e_m^{\alpha_m},$$

$$Q_{Aff}(S) := \sum_{|\alpha|} f_{\alpha} \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_m}^{\alpha_m}.$$

•Cas "courbe" : "Quantification affine" Q_{ω} : si

$$S = f \otimes h_1 \otimes \dots \otimes h_k, \quad Q_{\omega}(S) := f \circ L_{\omega^{-1}(h_1)} \dots L_{\omega^{-1}(h_k)}.$$

•Cas "plat" : Application γ :

$$\mathcal{L}_{X^h} Q_{Aff}(S) = Q_{Aff}((L_{X^h} + \gamma(h))S).$$

•Autres opérateurs différentiels et cas conforme (P. Mathonet, R.) : méthode des opérateurs de Casimir :

•Cas "plat" : Quantification affine Q_{Aff} : si

$$S = \sum_{|\alpha|} f_{\alpha} \otimes e_1^{\alpha_1} \vee \dots \vee e_m^{\alpha_m},$$

$$Q_{Aff}(S) := \sum_{|\alpha|} f_{\alpha} \partial_{x^1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x^m}^{\alpha_m}.$$

•Cas "courbe" : "Quantification affine" Q_{ω} : si

$$S = f \otimes h_1 \otimes \dots \otimes h_k, \quad Q_{\omega}(S) := f \circ L_{\omega^{-1}(h_1)} \dots L_{\omega^{-1}(h_k)}.$$

•Cas "plat" : Application γ :

$$\mathcal{L}_{X^h} Q_{Aff}(S) = Q_{Aff}((L_{X^h} + \gamma(h))S).$$

•Cas "courbe" : Application γ' :

$$\mathcal{L}_{h^*} Q_{\omega}(S) = Q_{\omega}((L_{h^*} + \gamma'(h))S), \quad \forall h \in \mathfrak{g}_1.$$

• Cas "plat" : Casimirs C et \mathcal{C} :

$$C = -\frac{1}{2}\rho_*(\mathcal{E}) + \frac{1}{2m}\rho_*(\mathcal{E})^2 + \sum_j \rho_*(A_j)\rho_*(A_j^*),$$

$$\mathcal{C} = C - 2 \sum_i \gamma(\epsilon^i) \partial_{x^i}.$$

- Cas "plat" : Casimirs C et \mathcal{C} :

$$C = -\frac{1}{2}\rho_*(\mathcal{E}) + \frac{1}{2m}\rho_*(\mathcal{E})^2 + \sum_j \rho_*(A_j)\rho_*(A_j^*),$$

$$\mathcal{C} = C - 2 \sum_i \gamma(\epsilon^i) \partial_{x^i}.$$

- Cas "courbe" : "Casimirs" C^ω et \mathcal{C}^ω :

$$C^\omega := -\frac{1}{2}\rho_*(\mathcal{E}) + \frac{1}{2m}\rho_*(\mathcal{E})^2 + \sum_j \rho_*(A_j)\rho_*(A_j^*),$$

$$\mathcal{C}^\omega := C^\omega - 2 \sum_i \gamma'(\epsilon^i) L_{\omega^{-1}(e_i)}.$$

- Cas "plat" : Casimirs C et \mathcal{C} :

$$C = -\frac{1}{2}\rho_*(\mathcal{E}) + \frac{1}{2m}\rho_*(\mathcal{E})^2 + \sum_j \rho_*(A_j)\rho_*(A_j^*),$$

$$\mathcal{C} = C - 2 \sum_i \gamma(\epsilon^i) \partial_{x^i}.$$

- Cas "courbe" : "Casimirs" C^ω et \mathcal{C}^ω :

$$C^\omega := -\frac{1}{2}\rho_*(\mathcal{E}) + \frac{1}{2m}\rho_*(\mathcal{E})^2 + \sum_j \rho_*(A_j)\rho_*(A_j^*),$$

$$\mathcal{C}^\omega := C^\omega - 2 \sum_i \gamma'(\epsilon^i) L_{\omega^{-1}(e_i)}.$$

- Cas "plat" : Quantification de S t.q. $C(S) = \alpha S$:
 $Q_{Aff}(Q(S))$, $Q(S)$ t.q $\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$ et "tête" de
 $Q(S) = S$.

- Cas "plat" : Casimirs C et \mathcal{C} :

$$C = -\frac{1}{2}\rho_*(\mathcal{E}) + \frac{1}{2m}\rho_*(\mathcal{E})^2 + \sum_j \rho_*(A_j)\rho_*(A_j^*),$$

$$\mathcal{C} = C - 2 \sum_i \gamma(\epsilon^i) \partial_{x^i}.$$

- Cas "courbe" : "Casimirs" C^ω et \mathcal{C}^ω :

$$C^\omega := -\frac{1}{2}\rho_*(\mathcal{E}) + \frac{1}{2m}\rho_*(\mathcal{E})^2 + \sum_j \rho_*(A_j)\rho_*(A_j^*),$$

$$\mathcal{C}^\omega := C^\omega - 2 \sum_i \gamma'(\epsilon^i) L_{\omega^{-1}(e_i)}.$$

- Cas "plat" : Quantification de S t.q. $C(S) = \alpha S$:
 $Q_{Aff}(Q(S))$, $Q(S)$ t.q. $\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$ et "tête" de
 $Q(S) = S$.

- Cas "courbe" : Quantification de S t.q. $C^\omega(S) = \alpha S$:
 $Q_\omega(Q(S))$, $Q(S)$ t.q. $\mathcal{C}^\omega(Q(S)) = \alpha Q(S)$ et "tête" de
 $Q(S) = S$.

- Cas "plat" : $\mathcal{L} \circ Q = Q \circ L$ car $[\mathcal{C}, \mathcal{L}] = 0$ et $[C, L] = 0$.

- Cas "plat" : $\mathcal{L} \circ Q = Q \circ L$ car $[\mathcal{C}, \mathcal{L}] = 0$ et $[C, L] = 0$.
- Cas "courbe" : $(L_{h^*} + \gamma'(h)) \circ Q = Q \circ L_{h^*}$ car $[\mathcal{C}^\omega, L_{h^*} + \gamma'(h)] = 0$ et $[C^\omega, L_{h^*}] = 0$.

- Cas "plat" : $\mathcal{L} \circ Q = Q \circ L$ car $[\mathcal{C}, \mathcal{L}] = 0$ et $[C, L] = 0$.
- Cas "courbe" : $(L_{h^*} + \gamma'(h)) \circ Q = Q \circ L_{h^*}$ car $[\mathcal{C}^\omega, L_{h^*} + \gamma'(h)] = 0$ et $[C^\omega, L_{h^*}] = 0$.
- On a dans le cas courbe $\mathcal{L}_{h^*} Q_\omega(Q(S)) = Q_\omega((L_{h^*} + \gamma'(h))Q(S)) = 0$ si $L_{h^*} S = 0$.

- Cas "plat" : $\mathcal{L} \circ Q = Q \circ L$ car $[\mathcal{C}, \mathcal{L}] = 0$ et $[C, L] = 0$.
- Cas "courbe" : $(L_{h^*} + \gamma'(h)) \circ Q = Q \circ L_{h^*}$ car $[\mathcal{C}^\omega, L_{h^*} + \gamma'(h)] = 0$ et $[C^\omega, L_{h^*}] = 0$.
- On a dans le cas courbe $\mathcal{L}_{h^*} Q_\omega(Q(S)) = Q_\omega((L_{h^*} + \gamma'(h))Q(S)) = 0$ si $L_{h^*}S = 0$.
- Si S est G_0 -équivariant, $Q(S)$ est G_0 -équivariant et $Q_\omega(Q(S))$ préserve la G_0 -équivariance.

Remarque : cette méthode permet de trouver des applications naturelles

$Q : \{\text{réductions de } P^2M \text{ à } H\} \rightarrow \{\text{quantifications sur } M\},$

où P^2M est le fibré des repères du deuxième ordre et où H est un groupe de Lie provenant d'une algèbre LFT

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1.$$

- Quantification des espaces singuliers (N. Poncin, R. Wolak, R.)
- Espace de configuration M possède une symétrie \rightarrow on considère le quotient M/G où G est un groupe de Lie

- Quantification des espaces singuliers (N. Poncin, R. Wolak, R.)
- Espace de configuration M possède une symétrie \rightarrow on considère le quotient M/G où G est un groupe de Lie
- Sous certaines conditions, M/G : orbifold V

- Quantification des espaces singuliers (N. Poncin, R. Wolak, R.)
- Espace de configuration M possède une symétrie \rightarrow on considère le quotient M/G où G est un groupe de Lie
- Sous certaines conditions, M/G : orbifold V
- Désingularisation : $V \cong$ Espace des feuilles de (M, \mathcal{F})

- Quantification des espaces singuliers (N. Poncin, R. Wolak, R.)

- Espace de configuration M possède une symétrie \rightarrow on considère le quotient M/G où G est un groupe de Lie
- Sous certaines conditions, M/G : orbifold V
- Désingularisation : $V \cong$ Espace des feuilles de (M, \mathcal{F})
- Quantification :

$$\begin{array}{ccc}
 \nabla_{\mathcal{F}}, S_{\mathcal{F}} & \xrightarrow{Q_{\mathcal{F}}} & Q_{\mathcal{F}}(\nabla_{\mathcal{F}})(S_{\mathcal{F}}) \\
 \uparrow p^* & & \downarrow p^{*-1} \\
 \nabla_V, S_V & \xrightarrow{Q_V} & Q_V(\nabla_V)(S_V)
 \end{array}$$

- Quantification des supervariétés (T. Leuther, P. Mathonet, R.)

- Quantification des supervariétés (T. Leuther, P. Mathonet, R.)
- Quantification $\mathrm{pgl}(p+1, q)$ -équivariante sur $\mathbb{R}^{p|q}$ (P. Mathonet, R.)

- Quantification des supervariétés (T. Leuther, P. Mathonet, R.)
- Quantification $\mathrm{pgl}(p+1, q)$ -équivariante sur $\mathbb{R}^{p|q}$ (P. Mathonet, R.)
- Quantification naturelle projectivement invariante sur les supervariétés (T. Leuther, R.)